Литература

1. Галаев С. В., Гохман А. В. *Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях со связностью* // Математика. Механика. – 2000. – №2. – С. 16–19.

2. Arteaga J. R., Malakhaltsev M. A., Serna A. H. T. *Isometry Group and Geodesics of the Wagner Lift of a Riemannian Metric on Two-Dimensional Manifold* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – Vol. 33. – No. 4. – pp. 293–311.

3. Галаев С. В. *Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой* // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 632–640.

ALMOST HERMITIAN STRUCTURES ON THE TOTAL SPACE OF ADMISSIBLE ORTHONORMAL FRAMES

S.V. Galaev

The bundle $(P(M,D,G),p,M)$ of admissible orthonormal frames over a three-dimensional contact metric manifold M is considered. On the total space $P(M,D,G)$ of the bundle of admissible frame, a structure of an almost Hermitian manifold is defined. The sufficient conditions are found for the obtained structure to be a Hermitian structure.

Keywords: Interior connection, the associated connection, Schouten curvature tensor.

УДК 514.762

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

И. Гинтерлейтнер[1], Н.И. Гусева[2], Й. Микеш[3]

1 *hinterleitner.i@fce.vutbr.cz*; Brno University of Technology
2 *ngus12@mail.ru*; Московский государственный педагогический университет
3 *josef.mikes@upol.cz*; Palacky University in Olomouc

Формулируются некоторые результаты о конформных отображениях компактных псевдо-римановых пространств на пространства Эйнштейна.

Ключевые слова: Конформные отображения,пространства Эйнштейна, компактные пространства.

В 1923 г. Г. В. Бринкманн начал изучать конформные отображения на Эйнштейновы пространства. Эти исследования детально изложены в монографии А. З. Петрова [1], а также в книге [2].

В работе [3] доказано, что (псевдо-) риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$ и $s(x)\,(>0)$:

$$s_{,ij} = u\,g_{ij} - s\,L_{ij}, \tag{1}$$

где $L_{ij} = \frac{1}{n-2}\,(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}\,g_{ij})$, R_{ij} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, запятой обозначена ковариантная производная.

При этом метрики пространств V_n и $\bar{V}_n$ связаны условиями:

$$\bar{g}_{ij}(x) = s^{-2} g_{ij}(x)$$

в общей по конформному отображению системе координат x.

Условия (1) выполняются при минимальных требованиях на класс гладкости рассматриваемых функций, то есть когда при этом функция $s(x) \in C^2$ и $u(x)$ является непрерывной функцией. Очевидно, что тогда V_n и $\bar{V}_n \in C^2$, т.е. $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x) \in C^2$.

В работе [3], при условии V_n и $\bar{V}_n \in C^3$, доказано, что риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n \in C^3$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)\,(>0)$ и вектора $s_i(x)$:

$$s_{,i} = s_i; \quad s_{i,j} = u\, g_{ij} - s\, L_{ij}; \quad u_{,i} = -s_\alpha L_i^\alpha. \tag{2}$$

В работе [4] мы доказали (совместно с Л. Е. Евтушиком), что подобные уравнения имеют место при более слабых условиях на дифференцируемость метрик изучаемых пространств.

Можно доказать следующую модификацию известной теоремы Хопфа:

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in C^2$ – функция на односвязном компактном n-мерном многообразии M_n без края. Тогда если для каждой точки $P_0 \in M_n$ существует координатная окрестность $U(x^1, x^2, \dots, x^n) \in M_n$ и если в этой окрестности существуют непрерывные функции $A^{ij}(x)$ и $B^i(x)$ для точек $P(x) \in U$ так, что всюду на U выполняется следующее неравенство*

$$A^{ab}(x)\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^a \partial x^b} + B^a(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} \geq 0 \quad (\textit{соотв.} \;\; \leq 0), \tag{3}$$

где $A^{ab}(x) z_a z_b$ – положительно определенная форма, то φ является постоянной на M_n.

Символы “ ≥ ” (или “ ≤ ”) участвуют в неравенствах (3) *для всех координатных окрестностей одновременно.*

Здесь и далее изучаем связные многообразия без края. Естественно, в (псевдо-) римановых и аффинносвязных пространствах частные производные в формулах (3) можно заменить ковариантными производными.

В теореме 1 не предполагается, что функции $A^{ij}(x)$ и $B^i(x)$ определяют геометрический объект определенный “ в целом” на M_n, как предполагается например в книге К. Яно и С. Бохнера [5] (стр. 26).

При помощи этой теоремы доказана следующая

Теорема 2. *Пусть V_n – компактное псевдо-риманово пространство. Если тензор Риччи образует положительно (или отрицательно) определенную форму, тогда конформное отображение V_n на пространства Эйнштейна является только гомотетичным.*

Из последней теоремы вытекает следующая

Теорема 3. *Компактные псевдо-римановы пространства, которые не являются Эйнштейновыми, тензор Риччи которых образует положительно (или отрицательно) определенную форму, не допускают конформные отображения на пространства Эйнштейна.*

The paper was supported by the grant IGA Faculty of Science 2017012 Mathematical Structures of the Palacky University and the project No. LO1408, AdMas UP—Advanced Materials, Structures and Technologies (supported by the Ministry of Education, Youth and Sports under the National Sustainability Programme I), Brno University of Technology.

Литература

1. Петров А. З. *Новые методы в теории относительности.* – М.: Наука, 1965. – 495с.

2. Mikeš J., et al. *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566p.

3. Микеш Й., Гаврильченко М. Л., Гладышева Е. И. *О конформных ототбражениях на пространства Эйнштейна.* // Вестник Моск. ун-та. – 1994. – № 3. – С. 13–17.

4. Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й. *Конформных ототбражения на пространства Эйнштейна.* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 10. – С. 8–13.

5. Yano K., Bochner S. *Curvature and Betti numbers.* – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1953. – 190p.

CONFORMAL MAPPINGS ONTO COMPACT EINSTEIN SPACES

I. Hinterleitner, N.I. Guseva, J. Mikes

We formulate certain results of conformal mappings of compact pseudo-Riemannian spaces onto Einstein spaces.

Keywords: Conformal mappings, Einstein spaces, compact spaces.

УДК 514.762; 514.82

О ПРИЧИННОЙ СТРУКТУРЕ РАССЛОЕННЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар[1], Е.И. Яковлев[2]

1 *gonchar.t.a@yandex.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики
2 *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

Исследуется главное расслоение с заданной на его тотальном пространстве лоренцевой метрикой,инвариантной относительно действия структурной группы. Эта конструкция индуцирует лоренцеву геометрию на базе расслоения. Получены некоторые связи между причинными свойствами указанных лоренцевых многообразий.

Ключевые слова: Главное расслоение, G-связность, лоренцево многообразие, причинность.

Пусть $\xi = (E, p, B, G)$ — гладкое главное расслоение с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой G, $\dim B = n$, $\dim G = k$, $\dim E = m = n+k$. Предположим, что на